

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Tématická oblast	Matematika - Rovnice a slovní úlohy
Datum vytvoření	22. 8. 2012
Ročník	4. ročník osmiletého gymnázia
Stručný obsah	Řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých – diskuse řešitelnosti.
Způsob využití	Postupné procházení jednotlivých snímků. Interakce studentů prostřednictvím odpovědí na otázky a výpočtu příkladů.
Autor	Ing. Michal Heczko
Kód	VY_32_INOVACE_22_MHEC16

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Opakování

Otázka

S diskusí řešitelnosti jste se již setkali u rovnic s jednou neznámou.

Odpověď

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Opakování

Otázka

S diskusí řešitelnosti jste se již setkali u rovnic s jednou neznámou.

- Kdy taková rovnice má nekonečně mnoho řešení?

Odpověď

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Opakování

Otázka

S diskusí řešitelnosti jste se již setkali u rovnic s jednou neznámou.

- Kdy taková rovnice má nekonečně mnoho řešení?

Odpověď

- Pokud rovnici pomocí ekvivalentních úprav upravíme do tvaru $0 \cdot x = 0$, je řešením rovnice každé reálné číslo.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Opakování

Otázka

S diskusí řešitelnosti jste se již setkali u rovnic s jednou neznámou.

- Kdy taková rovnice má nekonečně mnoho řešení?
- Kdy takové rovnice nemá žádné řešení?

Odpověď

- Pokud rovnici pomocí ekvivalentních úprav upravíme do tvaru $0 \cdot x = 0$, je řešením rovnice každé reálné číslo.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Opakování

Otázka

S diskusí řešitelnosti jste se již setkali u rovnic s jednou neznámou.

- Kdy taková rovnice má nekonečně mnoho řešení?
- Kdy takové rovnice nemá žádné řešení?

Odpověď

- Pokud rovnici pomocí ekvivalentních úprav upravíme do tvaru $0 \cdot x = 0$, je řešením rovnice každé reálné číslo.
- Pokud rovnici pomocí ekvivalentních úprav upravíme do tvaru $0 \cdot x = b$ (kde b je reálné číslo různé od 0), nemá rovnice žádné řešení.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Počet řešení

- Diskuse řešitelnosti bude u soustav dvou rovnic o dvou neznámých probíhat podobně, jako u rovnic s jednou neznámou.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Počet řešení

- Diskuse řešitelnosti bude u soustav dvou rovnic o dvou neznámých probíhat podobně, jako u rovnic s jednou neznámou.
- Soustavy, které jsme zatím řešili, měli jedno řešení. Tímto řešením byla uspořádaná dvojice hodnot, kdy každá hodnota příslušela jedné z neznámých. Řešení tedy můžeme zapsat například: $x = 1; y = 2$ nebo $[x, y] = [1, 2]$

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Počet řešení

- Diskuse řešitelnosti bude u soustav dvou rovnic o dvou neznámých probíhat podobně, jako u rovnic s jednou neznámou.
- Soustavy, které jsme zatím řešili, měli jedno řešení. Tímto řešením byla uspořádaná dvojice hodnot, kdy každá hodnota příslušela jedné z neznámých. Řešení tedy můžeme zapsat například: $x = 1; y = 2$ nebo $[x, y] = [1, 2]$
- Pokud se při řešení soustavy dostaneme k platné rovnosti (typu $0 = 0, 4 = 4, \dots$) má soustava nekonečně mnoho řešení.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Počet řešení

- Diskuse řešitelnosti bude u soustav dvou rovnic o dvou neznámých probíhat podobně, jako u rovnic s jednou neznámou.
- Soustavy, které jsme zatím řešili, měli jedno řešení. Tímto řešením byla uspořádaná dvojice hodnot, kdy každá hodnota příslušela jedné z neznámých. Řešení tedy můžeme zapsat například: $x = 1; y = 2$ nebo $[x, y] = [1, 2]$
- Pokud se při řešení soustavy dostaneme k platné rovnosti (typu $0 = 0, 4 = 4, \dots$) má soustava nekonečně mnoho řešení.
- Pokud se při řešení soustavy dostaneme k nerovnosti (typu $0 = 1, 4 = -3, \dots$) nemá soustava žádné řešení.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Žádné řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 1$$

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Žádné řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 1$$

Řešení

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Žádné řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 1$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Žádné řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 1$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 1$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Žádné řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 1$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 1$$

$$0 = -5$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbude výraz $0 = -5$. Jedná se o nerovnost. Soustava tedy nemá žádné řešení.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Žádné řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 1$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 1$$

$$0 = -5$$

Zadaná soustava rovnic nemá řešení.

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbude výraz $0 = -5$. Jedná se o nerovnost. Soustava tedy nemá žádné řešení.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Řešení

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 6$$

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 6$$

$$0 = 0$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbyde výraz $0 = 0$. Soustava tedy má nekonečně mnoho řešení.
- Řešením však není libovolná dvojice reálných čísel, ale mezi neznámou x a y bude platit určitá závislost.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 6$$

$$0 = 0$$

$$3x + 2y = 3$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbyde výraz $0 = 0$. Soustava tedy má nekonečně mnoho řešení.
- Řešením však není libovolná dvojice reálných čísel, ale mezi neznámou x a y bude platit určitá závislost.
- Jednu z těchto neznámých (y) v jedné rovnici nahradíme parametrem t a vyjádříme druhou neznámou.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 6$$

$$0 = 0$$

$$3x + 2y = 3$$

$$3x + 2t = 3 \quad | -2t$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbyde výraz $0 = 0$. Soustava tedy má nekonečně mnoho řešení.
- Řešením však není libovolná dvojice reálných čísel, ale mezi neznámou x a y bude platit určitá závislost.
- Jednu z těchto neznámých (y) v jedné rovnici nahradíme parametrem t a vyjádříme druhou neznámou.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 6$$

$$0 = 0$$

$$3x + 2y = 3$$

$$3x + 2t = 3 \quad | -2t$$

$$3x = 3 - 2t \quad |: 3$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbyde výraz $0 = 0$. Soustava tedy má nekonečně mnoho řešení.
- Řešením však není libovolná dvojice reálných čísel, ale mezi neznámou x a y bude platit určitá závislost.
- Jednu z těchto neznámých (y) v jedné rovnici nahradíme parametrem t a vyjádříme druhou neznámou.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 6$$

$$0 = 0$$

$$3x + 2y = 3$$

$$3x + 2t = 3 \quad | -2t$$

$$3x = 3 - 2t \quad |: 3$$

$$x = \frac{3-2t}{3}$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbyde výraz $0 = 0$. Soustava tedy má nekonečně mnoho řešení.
- Řešením však není libovolná dvojice reálných čísel, ale mezi neznámou x a y bude platit určitá závislost.
- Jednu z těchto neznámých (y) v jedné rovnici nahradíme parametrem t a vyjádříme druhou neznámou.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 6$$

$$0 = 0$$

$$3x + 2y = 3$$

$$3x + 2t = 3 \quad | -2t$$

$$3x = 3 - 2t \quad | : 3$$

$$x = \frac{3-2t}{3}$$

Řešením soustavy rovnic je
uspořádaná dvojice

$$[x, y] = \left[\frac{3-2t}{3}, t \right].$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbyde výraz $0 = 0$. Soustava tedy má nekonečně mnoho řešení.
- Řešením však není libovolná dvojice reálných čísel, ale mezi neznámou x a y bude platit určitá závislost.
- Jednu z těchto neznámých (y) v jedné rovnici nahradíme parametrem t a vyjádříme druhou neznámou.
- Výsledek zapíšeme ve tvaru uspořádané dvojice.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Nekonečně mnoho řešení – Řešený příklad

Zadání

$$3x + 2y = 3$$

$$6x + 4y = 6$$

Řešení

$$3x + 2y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$6x + 4y = 6$$

$$-6x - 4y = -6$$

$$6x + 4y = 6$$

$$0 = 0$$

$$3x + 2y = 3$$

$$3x + 2t = 3 \quad | -2t$$

$$3x = 3 - 2t \quad | : 3$$

$$x = \frac{3-2t}{3}$$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice

$$[x, y] = \left[\frac{3-2t}{3}, t \right].$$

- Pro řešení naší soustavy použijeme sčítací metodu.
- První rovnici vynásobíme číslem -2 a získáme rovnice, které můžeme sečíst.
- Po sečtení rovnic nám zbyde výraz $0 = 0$. Soustava tedy má nekonečně mnoho řešení.
- Řešením však není libovolná dvojice reálných čísel, ale mezi neznámou x a y bude platit určitá závislost.
- Jednu z těchto neznámých (y) v jedné rovnici nahradíme parametrem t a vyjádříme druhou neznámou.
- Výsledek zapíšeme ve tvaru uspořádané dvojice.
- Po dosazení hodnoty t může být řešením například $[-1, 3]$, $[1, 0]$, $[3, -3]$, ...

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Příklady na procvičení

Vyřešte následující soustavy rovnic a určete počet řešení:

Příklad č. 1

$$-8x + 6y = 16$$

$$-4x + 3y = 8$$

Příklad č. 2

$$12x - 4y = 6$$

$$-3x + y = -2$$

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Příklad č. 1

Zadání

$$-8x + 6y = 16$$

$$-4x + 3y = 8$$

$$-8x + 6y = 16$$

$$-4x + 3y = 8 \quad | \cdot (-2)$$

$$-8x + 6y = 16$$

$$8x - 6y = -16$$

$$0 = 0$$

$$x = t$$

$$-4t + 3y = 8 \quad | +4t$$

$$3y = 8 + 4t \quad | :3$$

$$y = \frac{8+4t}{3}$$

Řešením soustavy rovnic je
uspořádaná dvojice
 $[x, y] = [t, \frac{8+4t}{3}]$.

Soustavy rovnic – diskuse řešitelnosti

Příklad č. 2

Zadání

$$\begin{array}{rcl} 12x - 4y & = & 6 \\ -3x + y & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 12x - 4y & = & 6 \\ -3x + y & = & -2 \quad | \cdot 4 \\ \hline 12x - 4y & = & 6 \\ -12x + 4y & = & -8 \quad | \cdot 4 \\ \hline 0 & = & -2 \end{array}$$

Zadaná soustava nemá řešení.