
Sada 1.1 Exponenciální rovnice

1. **Příklad 1.1.1** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\frac{2^{2x+2}}{2^{3x-5}} = \frac{16}{8}$$

2. **Příklad 1.1.2** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5^{x-4} = 0,008$$

3. **Příklad 1.1.3** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$2 \cdot 0,5^{x^2 + \frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$$

4. **Příklad 1.1.4** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\sqrt{3^x} \cdot (3^{x-1})^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{9^{x-2}}}$$

5. **Příklad 1.1.5** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\frac{10^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{10^{12-12x}}$$

Příklad 1.1.1 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\frac{2^{2x+2}}{2^{3x-5}} = \frac{16}{8}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{2^{2x+2}}{2^{3x-5}} &= \frac{16}{8} \\ \frac{2^{2x+2}}{2^{3x-5}} &= \frac{2^4}{2^3} \\ 2^{(2x+2)-(3x-5)} &= 2^{4-3} \\ 2^{2x+2-3x+5} &= 2^1 \\ 2^{-x+7} &= 2^1 \\ -x + 7 &= 1 \\ -x &= -6 \\ x &= 6\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}L(6) &= \frac{2^{2 \cdot 6 + 2}}{2^{3 \cdot 6 - 5}} = \frac{2^{14}}{2^{13}} = 2^{14-13} = 2^1 = 2 \\ P(6) &= \frac{16}{8} = 2 \\ L(6) &= P(6)\end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{6\}$$

Příklad 1.1.2 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5^{x-4} = 0,008$$

Řešení:

$$\begin{aligned}5^{x-4} &= 0,008 \\5^{x-4} &= \frac{8}{1000} \\5^{x-4} &= \frac{1}{125} \\5^{x-4} &= \frac{1}{5^3} \\5^{x-4} &= 5^{-3} \\x - 4 &= -3 \\x &= 1\end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{1\}$$

Příklad 1.1.3 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$2 \cdot 0,5^{x^2 + \frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}2 \cdot 0,5^{x^2 + \frac{8}{3}x} &= \frac{8}{\sqrt[3]{4}} \\2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 + \frac{8}{3}x} &= \frac{2^3}{2^{\frac{2}{3}}} \\2 \cdot (2^{-1})^{x^2 + \frac{8}{3}x} &= 2^3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \\2 \cdot 2^{-x^2 - \frac{8}{3}x} &= 2^3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \\2^{1-x^2-\frac{8}{3}x} &= 2^{3-\frac{2}{3}} \\1-x^2-\frac{8}{3}x &= 3-\frac{2}{3} \\3-3x^2-8x &= 9-2 \\-3x^2-8x-4 &= 0 \\3x^2+8x+4 &= 0\end{aligned}$$

Výpočet diskriminantu:

$$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} \\x_{1,2} &= \frac{-8 \pm 4}{6} \\x_1 &= -2 \\x_2 &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \left\{-2; -\frac{2}{3}\right\}$$

Příklad 1.1.4 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\sqrt{3^x} \cdot (3^{x-1})^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{9^{x-2}}}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^x} \cdot (3^{x-1})^{x+1} &= \frac{1}{\sqrt[4]{9^{x-2}}} \\ 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{(x-1) \cdot (x+1)} &= \frac{1}{9^{\frac{x-2}{4}}} \\ 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{(x-1) \cdot (x+1)} &= \frac{1}{(3^2)^{\frac{x-2}{4}}} \\ 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{(x-1) \cdot (x+1)} &= (3^{-2})^{\frac{x-2}{4}} \\ 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{(x-1) \cdot (x+1)} &= 3^{\frac{-2 \cdot (x-2)}{4}} \\ 3^{\frac{x}{2} + x^2 - 1} &= 3^{-\frac{x-2}{2}} \\ \frac{x}{2 + x^2 - 1} &= -\frac{x-2}{2} \\ x + 2x^2 - 2 &= -x + 2 \\ 2x^2 + 2x - 4 &= 0\end{aligned}$$

Výpočet diskriminantu:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 36$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 2} \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 6}{4} \\ x_1 &= -2 \\ x_2 &= 1\end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{-2; 1\}$$

Příklad 1.1.5 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\frac{10^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{10^{12-12x}}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{10^{x^2}}{2^{-15}} &= \frac{5^{-15}}{10^{12-12x}} \\ 10^{x^2} \cdot 10^{12-12x} &= 2^{-15} \cdot 5^{-15} \\ 10^{x^2} \cdot 10^{12-12x} &= (2 \cdot 5)^{-15} \\ 10^{x^2} \cdot 10^{12-12x} &= 10^{-15} \\ 10^{x^2+12-12x} &= 10^{-15} \\ x^2 + 12 - 12x &= -15 \\ x^2 - 12x + 27 &= 0\end{aligned}$$

Výpočet diskriminantu:

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 36$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \\ x_{1,2} &= \frac{12 \pm 6}{2} \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= 9\end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{3; 9\}$$