
Sada 1.3 Exponenciální rovnice

Příklad 1.3.1 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$9^{x+1} + 3^{x+2} = 810$$

Příklad 1.3.2 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$$

Příklad 1.3.3 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$$

Příklad 1.3.4 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$$

Příklad 1.3.5 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$3 \cdot (9^{2x} + 1) = 9^{x+2} + 9^{x-1}$$

Příklad 1.3.1 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$9^{x+1} + 3^{x+2} = 810$$

Řešení:

$$\begin{aligned}9^{x+1} + 3^{x+2} &= 810 \\9^x \cdot 9 + 3^x \cdot 3^2 &= 810 \\9 \cdot 9^x + 9 \cdot 3^x - 810 &= 0 \\9 \cdot (3^x)^2 + 9 \cdot 3^x - 810 &= 0 \\(3^x)^2 + 3^x - 90 &= 0\end{aligned}$$

Substituce:

$$\begin{aligned}3^x &= a \\a^2 + a - 90 &= 0\end{aligned}$$

Výpočet diskriminantu:

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned}a_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} \\a_{1,2} &= \frac{-1 \pm 19}{2} \\a_1 &= -10 \\a_2 &= 9\end{aligned}$$

Návrat k substituci:

$$\begin{array}{llll}3^x &= & a_1 & \vee & 3^x &= & a_2 \\3^x &= & -10 & \vee & 3^x &= & 9 \\-10 &\notin & \mathbf{H} & & 3^x &= & 3^2 \\&& & & x &= & 2\end{array}$$

Zkouška:

$$L(2) = 9^{2+1} + 3^{2+2} = 9^3 + 3^4 = 729 + 81 = 810$$

$$P(2) = 810$$

$$L(2) = P(2)$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{2\}$$

Příklad 1.3.2 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 &= 0 \\ (4^x)^2 - 6 \cdot 4^x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Substituce:

$$\begin{aligned} 4^x &= a \\ a^2 - 6a + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Výpočet diskriminantu:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \\ a_{1,2} &= \frac{6 \pm 2}{2} \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= 4 \end{aligned}$$

Návrat k substituci:

$$\begin{array}{llll} 4^x &= a_1 & \vee & 4^x = a_2 \\ 4^x &= 2 & \vee & 4^x = 4 \\ 2^{2x} &= 2^1 & \vee & 4^x = 4^1 \\ 2x &= 1 & \vee & x = 1 \\ x &= \frac{1}{2} & & \end{array}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

Příklad 1.3.3 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$$

Řešení:

$$\begin{aligned}4^x - 10 \cdot 2^{x-1} &= 24 \\4^x - 10 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} &= 24 \\(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2} &= 24 \\(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 24 &= 0\end{aligned}$$

Substituce:

$$\begin{aligned}2^x &= a \\a^2 - 5a - 24 &= 0\end{aligned}$$

Výpočet diskriminantu:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 121$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned}a_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1} \\a_{1,2} &= \frac{5 \pm 11}{2} \\a_1 &= -3 \\a_2 &= 8\end{aligned}$$

Návrat k substituci:

$$\begin{array}{llll}2^x &= a_1 & \vee & 2^x = a_2 \\2^x &= -3 & \vee & 2^x = 8 \\-3 &\notin \mathbf{H} & & 2^x = 2^3 \\& & & x = 3\end{array}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{3\}$$

Příklad 1.3.4 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$$

Řešení:

Definiční obor:

$$\begin{aligned} 3^x &\neq 0 \\ \mathbf{D} &= (-\infty; +\infty) \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^x + 3^{-x} &= 10 \\ 9 \cdot 3^x + \frac{1}{3^x} &= 10 \\ 9 \cdot (3^x)^2 + 1 &= 10 \cdot 3^x \\ 9 \cdot (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Substituce:

$$\begin{aligned} 3^x &= a \\ 9a^2 - 10a + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Výpočet diskriminantu:

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 64$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 9} \\ a_{1,2} &= \frac{10 \pm 8}{18} \\ a_1 &= \frac{1}{9} \\ a_2 &= 1 \end{aligned}$$

Návrat k substituci:

$$\begin{array}{llll} 3^x &= a_1 & \vee & 3^x = a_2 \\ 3^x &= \frac{1}{9} & \vee & 3^x = 1 \\ 3^x &= 3^{-2} & \vee & 3^x = 3^0 \\ x &= -2 & \vee & x = 0 \end{array}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{-2; 0\}$$

Příklad 1.3.5 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$3 \cdot (9^{2x} + 1) = 9^{x+2} + 9^{x-1}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (9^{2x} + 1) &= 9^{x+2} + 9^{x-1} \\ 3 \cdot 9^{2x} + 3 &= 9^x \cdot 9^2 + 9^x \cdot 9^{-1} \\ 3 \cdot (9^x)^2 + 3 &= 9^x \cdot 81 + 9^x \cdot \frac{1}{9} \\ 3 \cdot (9^x)^2 - 9^x \cdot 81 - 9^x \cdot \frac{1}{9} + 3 &= 0 \\ 3 \cdot (9^x)^2 - 9^x \cdot \left(81 + \frac{1}{9}\right) + 3 &= 0 \\ 3 \cdot (9^x)^2 - 9^x \cdot \frac{729 + 1}{9} + 3 &= 0 \\ 3 \cdot (9^x)^2 - \frac{730}{9} \cdot 9^x + 3 &= 0 \\ 27 \cdot (9^x)^2 - 730 \cdot 9^x + 27 &= 0 \end{aligned}$$

Substituce:

$$\begin{aligned} 9^x &= a \\ 27a^2 - 730a + 27 &= 0 \end{aligned}$$

Výpočet diskriminantu:

$$D = (-730)^2 - 4 \cdot 27 \cdot 27 = 529984$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{730 \pm \sqrt{529984}}{2 \cdot 27} \\ a_{1,2} &= \frac{730 \pm 728}{54} \\ a_1 &= \frac{1}{27} \\ a_2 &= 27 \end{aligned}$$

Návrat k substituci:

$$\begin{array}{rclclcl} 9^x & = & a_1 & \vee & 9^x & = & a_2 \\ 9^x & = & \frac{1}{27} & \vee & 9^x & = & 27 \\ 3^{2x} & = & 3^{-3} & \vee & 3^{2x} & = & 3^3 \\ x & = & \frac{-3}{2} & \vee & x & = & \frac{3}{2} \end{array}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$