
Sada 1.5 Exponenciální rovnice

Příklad 1.5.1 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1}$$

Příklad 1.5.2 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\sqrt[x+1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} = \sqrt[3x-7]{8^{x-3}}$$

Příklad 1.5.3 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5^x \cdot 4^{1-x} - 4^x \cdot 5^{1-x} = 1$$

Příklad 1.5.4 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$2^x \cdot 3^{2x} = 4^{x-1}$$

Příklad 1.4.5 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$$

Příklad 1.5.1 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} &= 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1} \\ 5 \cdot 2^x \cdot 2^2 - 6 \cdot 3^x \cdot 3^2 &= 3^x \cdot 3^3 + 2 \cdot 2^x \cdot 2 \\ 5 \cdot 2^x \cdot 4 - 6 \cdot 3^x \cdot 9 &= 3^x \cdot 27 + 2 \cdot 2^x \cdot 2 \\ 20 \cdot 2^x - 54 \cdot 3^x &= 27 \cdot 3^x + 4 \cdot 2^x \\ 20 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x &= 27 \cdot 3^x + 54 \cdot 3^x \\ 2^x \cdot (20 - 4) &= 3^x \cdot (27 + 54) \\ 2^x \cdot 16 &= 3^x \cdot 81 \\ \frac{2^x}{3^x} &= \frac{81}{16} \\ \frac{2^x}{3^x} &= \frac{3^4}{2^4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L(-4) &= 5 \cdot 2^{-4+2} - 6 \cdot 3^{-4+2} = 5 \cdot 2^{-2} - 6 \cdot 3^{-2} = 5 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{5}{4} - \frac{6}{9} = \frac{5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$P(-4) = 3^{-4+3} + 2 \cdot 2^{-4+1} = 3^{-1} + 2 \cdot 2^{-3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$L(-4) = P(-4)$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{-4\}$$

Příklad 1.5.2 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$${}^{x+1}\sqrt[3]{2^{3x-1}} = {}^{3x-7}\sqrt{8^{x-3}}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} {}^{x+1}\sqrt[3]{2^{3x-1}} &= {}^{3x-7}\sqrt{8^{x-3}} \\ \left[(2^{3x-1})^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{x+1}} &= (8^{x-3})^{\frac{1}{3x-7}} \\ \left[(2^{3x-1})^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{x+1}} &= \left(2^{3 \cdot (x-3)} \right)^{\frac{1}{3x-7}} \\ 2^{\frac{3x-1}{3 \cdot (x+1)}} &= 2^{\frac{3 \cdot (x-3)}{3x-7}} \\ \frac{3x-1}{3 \cdot (x+1)} &= \frac{3 \cdot (x-3)}{3x-7} \\ (3x-1) \cdot (3x-7) &= 3 \cdot (x-3) \cdot 3 \cdot (x+1) \\ 9x^2 - 3x - 21x + 7 &= 9x^2 + 9x - 27x - 27 \\ -24x + 7 &= -18x - 27 \\ -6x &= -34 \\ x &= \frac{17}{3} \end{aligned}$$

Definiční obor:

$$\begin{array}{ccc} 3 \cdot (x+1) & \neq & 0 \\ x & \neq & -1 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{ccc} 3x-7 & \neq & 0 \\ x & \neq & \frac{7}{3} \end{array}$$

$$\mathbf{D} = (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{7}{3}) \cup (\frac{7}{3}; +\infty)$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \left\{ \frac{17}{3} \right\}$$

Příklad 1.5.3 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5^x \cdot 4^{1-x} - 4^x \cdot 5^{1-x} = 1$$

Řešení:

Definiční obor:

$$4^x \neq 0 \quad \wedge \quad 5^x \neq 0$$

$$\mathbf{D} = (-\infty; +\infty)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 5^x \cdot 4^{1-x} - 4^x \cdot 5^{1-x} &= 1 \\ 5^x \cdot 4 \cdot 4^{-x} - 4^x \cdot 5 \cdot 5^{-x} &= 1 \\ 4 \cdot \frac{5^x}{4^x} - 5 \cdot \frac{4^x}{5^x} &= 1 \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x &= 1 \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-x} &= 1 \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x - 5 \cdot \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^x} &= 1 \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{2x} - 5 &= \left(\frac{5}{4}\right)^x \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{4}\right)^x - 5 &= 0 \\ 4 \cdot \left[\left(\frac{5}{4}\right)^x\right]^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Substituce:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{4}\right)^x &= a \\ 4a^2 - a - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Výpočet diskriminantu:} \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 81$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} \\ a_{1,2} &= \frac{1 \pm 9}{8} \\ a_1 &= -1 \\ a_2 &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Návrat k substituci:

$$\begin{array}{rclcl} 2^x & = & a_1 & \vee & 2^x = a_2 \\ \left(\frac{5}{4}\right)^x & = & -1 & \vee & \left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{5}{4} \\ -1 & \notin & \mathbf{H} & & \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^1 \\ & & & & x = 1 \end{array}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \{1\}$$

Příklad 1.5.4 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$2^x \cdot 3^{2x} = 4^{x-1}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 3^{2x} &= 4^{x-1} \\ 2^x \cdot 3^{2x} &= 2^{2 \cdot (x-1)} \\ \log(2^x \cdot 3^{2x}) &= \log 2^{2x-2} \\ \log 2^x + \log 3^{2x} &= \log 2^{2x-2} \\ x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 3 &= (2x-2) \cdot \log 2 \\ x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 3 &= 2x \cdot \log 2 - 2 \cdot \log 2 \\ x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 3 - 2x \cdot \log 2 &= -2 \cdot \log 2 \\ x \cdot (\log 2 + 2 \cdot \log 3 - 2 \cdot \log 2) &= -2 \cdot \log 2 \\ x \cdot (\log 2 + \log 3^2 - \log 2^2) &= -2 \cdot \log 2 \\ x \cdot (\log 2 + \log 9 - \log 4) &= -2 \cdot \log 2 \\ x \cdot \log \frac{2 \cdot 9}{4} &= -2 \cdot \log 2 \\ x \cdot \log \frac{18}{4} &= -2 \cdot \log 2 \\ x \cdot \log \frac{9}{2} &= -2 \cdot \log 2 \\ x \cdot (\log 9 - \log 2) &= -2 \cdot \log 2 \\ x &= \frac{-2 \cdot \log 2}{\log 9 - \log 2} \end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \left\{ \frac{-2 \cdot \log 2}{\log 9 - \log 2} \right\}$$

Příklad 1.4.5 V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}5^x \cdot 7^{2x} &= 16^{x-1} \\ \log(5^x \cdot 7^{2x}) &= \log 16^{x-1} \\ \log 5^x + \log 7^{2x} &= \log 16^{x-1} \\ x \cdot \log 5 + 2x \cdot \log 7 &= (x-1) \cdot \log 16 \\ x \cdot \log 5 + 2x \cdot \log 7 &= x \cdot \log 16 - \log 16 \\ x \cdot \log 5 + 2x \cdot \log 7 - x \cdot \log 16 &= -\log 16 \\ x \cdot (\log 5 + 2 \cdot \log 7 - \log 16) &= -\log 16 \\ x \cdot (\log 5 + \log 7^2 - \log 16) &= -\log 16 \\ x \cdot (\log 5 + \log 49 - \log 16) &= -\log 16 \\ x \cdot \log \frac{5 \cdot 49}{16} &= -\log 16 \\ x \cdot \log \frac{245}{16} &= -\log 16 \\ x &= -\frac{\log 16}{\log \frac{245}{16}}\end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \left\{ -\frac{\log 16}{\log \frac{245}{16}} \right\}$$