Sada 4.2 Logaritmické nerovnice

Příklad 4.2.1 V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

$$\log_{15}\left(x^2+3x\right) \leq \log_{15} x + \log_{15} 5$$

Řešení:

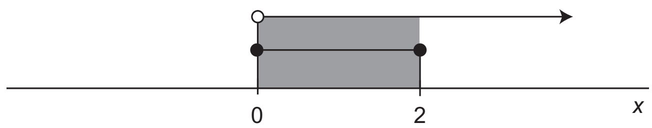
Definiční obor:

$$\begin{aligned} x^2+3x &> 0 \qquad\qquad \wedge \qquad x > 0 \\ x\cdot(x+3) &> 0 \\ \textit{Nulové body:}\quad & x_1=-3 \\ & x_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)]\cap(0;+\infty) \\ \mathbf{D} &= (0;+\infty) \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \log_{15}\left(x^2+3x\right) &\leq \log_{15} x + \log_{15} 5 \\ \log_{15}\left(x^2+3x\right) &\leq \log_{15} 5x \\ x^2+3x &\leq 5x \\ x^2-2x &\leq 0 \\ x\cdot(x-2) &\leq 0 \\ \textit{Nulové body:}\quad & x_1 = 0 \\ & x_2 = 2 \\ x &\in \langle 0;2\rangle \cap \mathbf{D} \\ x &\in \langle 0;2\rangle \cap (0;+\infty) \\ x &\in (0;2\rangle \end{aligned}$$



Ověření:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(1) &= \log_{15}\left(1^2+3\cdot 1\right) = \log_{15} 4 \\ \mathrm{P}(1) &= \log_{15} 1 + \log_{15} 5 = 0 + \log_{15} 5 = \log_{15} 5 \\ \mathrm{L}(1) &< \mathrm{P}(1) \end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = (0;2\rangle$$

Příklad 4.2.2 V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

$$\log_{0,3}(x-3) > \log_{0,3} x - \log_{0,3} 2$$

Řešení:

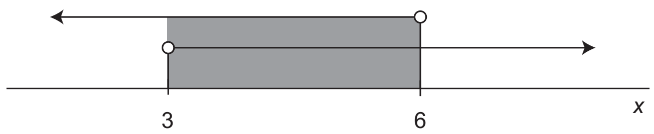
Definiční obor:

$$\begin{array}{rcl} x-3 & > & 0 \qquad \wedge \qquad x \; > \; 0 \\ x & > & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{D} = (3; +\infty)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \log_{0,3}(x-3) &> \log_{0,3} x - \log_{0,3} 2 \\ \log_{0,3}(x-3) &> \log_{0,3} \frac{x}{2} \\ x-3 &< \frac{x}{2} \\ 2x-6 &< x \\ x-6 &< 0 \\ x &< 6 \\ x &\in (-\infty; 6) \cap \mathbf{D} \\ x &\in (-\infty; 6) \cap (3; +\infty) \\ x &\in (3; 6) \end{aligned}$$



Množina řešení:

$$\mathbf{K} = (3; 6)$$

Příklad 4.2.3 V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

$$\log(x-3) + \log(2x-1) < 0$$

Řešení:

Definiční obor:

$$\begin{array}{rcl} x-3 & > & 0 \\ x & > & 3 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{rcl} 2x-1 & > & 0 \\ x & > & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{D} & = & (3;+\infty) \cap \left(\frac{1}{2};+\infty\right) \\ \mathbf{D} & = & (3;+\infty) \end{array}$$

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} \log(x-3) + \log(2x-1) & < & 0 \\ \log(x-3)\cdot(2x-1) & < & \log 10^0 \\ (x-3)\cdot(2x-1) & < & 10^0 \\ 2x^2-6x-x+3 & < & 1 \\ 2x^2-6x+2 & < & 0 \end{array}$$

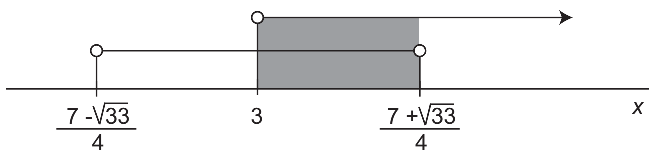
Výpočet diskriminantu: $D = (-7)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 49 - 16 = 33$

Nulové body: $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{2\cdot 2} = \dfrac{7 \pm 33}{4}$

$$x_1 = \frac{7+\sqrt{33}}{4}$$

$$x_2 = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$$

$$\begin{array}{rcl} x & \in & \left(\dfrac{7-\sqrt{33}}{4}; \dfrac{7+\sqrt{33}}{4}\right) \cap \mathbf{D} \\ x & \in & \left(\dfrac{7-\sqrt{33}}{4}; \dfrac{7+\sqrt{33}}{4}\right) \cap (3;+\infty) \\ x & \in & \left(3; \dfrac{7+\sqrt{33}}{4}\right) \end{array}$$



Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \left(3; \frac{7+\sqrt{33}}{4}\right)$$

Příklad 4.2.4 V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

$$\log 7 \log_{11}(x+3) \geq 0$$

Řešení:

Definiční obor:

$$\begin{aligned} x+3 &> 0 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = (-3; +\infty)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \log 7 \log_{11}(x+3) &\geq 0 \\ \log 7 &> 0 \\ \log_{11}(x+3) &\geq 0 \\ x+3 &\geq 11^0 \\ x+3 &\geq 1 \\ x &\geq -2 \\ x &\in \langle -2; +\infty) \cap \mathbf{D} \\ x &\in \langle -2; +\infty) \cap (-3; +\infty) \\ x &\in \langle -2; +\infty) \end{aligned}$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \langle -2; +\infty)$$

Příklad 4.2.5 V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

$$\log x \cdot \log_5(3x-1) > 0$$

Řešení:

Definiční obor:

$$\begin{array}{rclcrcl} x & > & 0 & \wedge & 3x-1 & > & 0 \\ & & & & x & > & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\mathbf{D} = \left(\tfrac{1}{3}; +\infty\right)$$

Řešení:

$$\log x \cdot \log_5(3x-1) > 0$$

Nulové body:

$$\begin{array}{rcl} \log x_1 & = & 0 \\ x_1 & = & 10^0 \\ x_1 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log_5(3x_2-1) & = & 0 \\ 3x_2-1 & = & 7^0 \\ 3x_2-1 & = & 1 \\ x_2 & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

	$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}; 1\right)$	$(1; +\infty)$
$\log x$	$-$	$-$	$+$
$\log_5(3x-1)$	$-$	$+$	$+$
$L(x)$	$+$	$-$	$+$

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$$

Množina řešení:

$$\mathbf{K} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$$